

8.1.6 Vlastnosti posloupností I

Opakování z funkcí:

Funkce $f(x)$ se nazývá rostoucí, právě když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce $f(x)$ se nazývá klesající, právě když pro všechna $x_1; x_2$ z definičního oboru platí: je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Př. 1: S užitím definic rostoucí a klesající funkce zformuluj definici rostoucí a klesající posloupnosti. Využij symboliku používanou u posloupností.

Př. 2: Nakresli graf posloupnosti 1;2;3;5;6. Vyznač do grafu všechny dvojice, které musíme porovnat, abychom z definice dokázali, že tato posloupnost je rostoucí.

Př. 3: Zformuluj analogickou větu pro klesající posloupnosti.

Př. 4: Rozhodni, které z následujících posloupností jsou rostoucí nebo klesající:

$$\text{a) } \left([-2]^n \right)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{b) } (3n-1)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{c) } \left(\frac{n+1}{n} \right)_{n=1}^{\infty}$$

Př. 5: Rozhodni, zda je posloupnost $a_1 = 4; a_{n+1} = a_n - 2; n \in \mathbb{N}$ rostoucí nebo klesající.

Př. 6: Rozhodni, zda je posloupnost $\left([1-n]^2 \right)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí nebo klesající.

Př. 7: Najdi chybu v následujícím postupu:

Rozhodni, zda je posloupnost $\left(\frac{n}{n-9,5} \right)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí nebo klesající.

Členy posloupnosti: $-\frac{1}{8,5}; -\frac{2}{7,5}; -\frac{3}{6,5}; -\frac{4}{5,5}; -\frac{5}{4,5}; -\frac{6}{3,5}; \dots \Rightarrow$ zdá se, že jde o

klesající posloupnost \Rightarrow musíme dokázat $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

$a_n = \frac{n}{n-9,5}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+1-9,5} = \frac{n+1}{n-8,5}$ dosadíme do nerovnosti:

$$\frac{n}{n-9,5} > \frac{n+1}{n-8,5} \quad / \cdot (n-9,5)(n-8,5)$$

$$n(n-8,5) > (n+1)(n-9,5)$$

$$n^2 - 8,5n > n^2 - 9,5n + n - 9,5$$

$0 > -9,5$ platí vždy \Rightarrow posloupnost je klesající.

Odvození je chybné, protože další část posloupnosti vypadá takto:

$$-\frac{1}{8,5}; -\frac{2}{7,5}; -\frac{3}{6,5}; -\frac{4}{5,5}; -\frac{5}{4,5}; -\frac{6}{3,5}; -\frac{7}{2,5}; -\frac{8}{1,5}; -\frac{9}{0,5}; \frac{10}{0,5}; \dots$$

Př. 8: Petáková:
strana 66/cvičení 74 c) d) e) g) h)